Exercice 8 :

Soit $f(x)=\sqrt{x^2+8}-x$.

1°/ Prouver que $\forall x\in[1,2]$ on a : $1\le f(x)\le 2$ et $|f'(x)|\le\frac{2}{3}$

2°/ Soit la suite (U_n) définie par $U_0=1$ et $U_{n+1}=f(U_n)$.

a) Montrer que $\forall n\in\mathbf{N}$, $1\le U_n\le 2$.

b) En utilisant le théorème des inégalités des accroissements finis, montrer que $\forall n\in\mathbf{N}$, $\left|U_{n+1}-2\sqrt{\frac{2}{3}}\right|\le\frac{2}{3}\left|U_n-2\sqrt{\frac{2}{3}}\right|$.

3°/a) Montrer que $\forall n\in\mathbf{N}$, $\left|U_n-2\sqrt{\frac{2}{3}}\right|\le(\frac{2}{3})^n$.

b) En déduire que (U_n) est une suite convergente vers un réel l que l'on calculera.

Exercice 9 :

Soit $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+3}$.

1°/ Etudier les variations de f.

2°/ On définit la suite (U_n) par : $\begin{cases}U_0=0\\U_{n+1}=f(U_n)\end{cases}$

a) Montrer que $\forall n\in\mathbf{N}$, $\frac{-1}{3}\le U_n\le 0$.

b) Montrer que $\forall x\in[\frac{-1}{3},0]$, $|f'(x)|\le\frac{27}{98}$.

3°/ On pose $\forall n\in\mathbf{N}$, $V_n=U_{2n}$ et $W_n=U_{2n+1}$

Prouver que $|W_{n+1}-V_{n+1}|\le\left(\frac{27}{98}\right)^{2n}|W_n-V_n|$.

4°/a) Montrer par récurrence que $\forall n\in\mathbf{N}$,

$|W_n-V_n|\le\left(\frac{27}{98}\right)^{2n}|W_0-V_0|$.

b) Montrer que (V_n) et (W_n) sont deux suites convergentes vers la même limite l.

5°/ En déduire que (U_n) est convergente vers l.